

几类图变换及其特征值

魏均斌

(广东工业大学 应用数学系, 广东 广州 510090)

摘要: 图的特征值是指其对应的邻接矩阵的特征值, 本文主要研究把一个图作适当变换后, 它的特征值的变化情况, 这里主要从图的特征多项式出发并运用图角来研究特征值.

关键词: 邻接矩阵; 特征值; 图角

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2004)02-0093-04

引 言

在文献[1]中, 作者构造了一些图变换及其相应的特征值的变化情况, Peter Rowlinson 在文献[2]中又引入图角的概念, 对图的特征值给出了一种新形式的刻画, 在此基础上, 本文新构造了几类图变换, 并得到了相应的特征值的变化规律.

对于任意的有限无向图 G , 设其点集为 $\{1, 2, \dots, n\}$, 其邻接矩阵为 $A = (a_{ij})$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果点 } i \text{ 与点 } j \text{ 相邻,} \\ 0 & \text{如果点 } i \text{ 与点 } j \text{ 不相邻.} \end{cases}$$

图 G 的特征多项式 $P_G(x)$ 是指图 G 的邻接矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征多项式, 即 $P_G(x) = \det(xI - A)$, 则图 G 的特征值和谱即为其邻接矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值和谱. 显然图 G 的特征值与其顶点的标号无关, 因对图 G 的顶点重新标号就会得到一个与原邻接矩阵相似的邻接矩阵, 它们有相同的特征值. 显然两个同构的图也有相同的特征值. n 阶图的特征值我们用 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 表示, 则它们都是实数, 因为无向图的邻接矩阵是对称的.

设 λ 为矩阵 A 的特征值, 则存在向量 $x \in R^n$, 使得 $Ax = \lambda x$, 则集合 $\{x \in R^n: Ax = \lambda x\}$ 就构成 R^n 的一个子空间, 称为特征值 λ 的特征空间, 用符号 $\varepsilon(\lambda)$ 表示, 所有这些特征值的特征空间也称为图 G 的特征空间. 由于邻接矩阵 $A = (a_{ij})$ 是对称的, 所以存在正交矩阵 U , 使得 $U^T A U = D$, 这里 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 是一个对角矩阵, 并且矩阵 U 的列向量即为对应特征值的特征向量, 它们构成空间 R^n 的一组标准正交基. 如果我们令每个特征值对应的特征向量相邻排列, 则我们得到 $D = \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \dots + \mu_m E_m$, 这里 $\mu_1, \dots, \mu_m$ 表示矩阵 A 的互不相同的特征值, 并且每个 E_i 是一个块对角矩阵 $\text{diag}(0, \dots, 0, I, 0, \dots, 0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). 则我们就可得到矩阵 A 的一个谱分解形式

$$A = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_m P_m,$$

其中 $P_i = U E_i U^T$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

下面我们引入图角的概念. 设图 G 的点集为 $\{1, 2, \dots, n\}$, 邻接矩阵为 $A = (a_{ij})$, 谱分解为

$A = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_m P_m$, 其中 $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_m$. 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是空间 R^n 的一组标准正交基, 向量 e_j 与特征空间 $\mathcal{E}(\mu_i)$ 所形成的角为 β_{ij} , $\alpha_j = \cos \beta_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). 一般地, 向量 e_j 与特征空间 $\mathcal{E}(\mu_i)$ 所形成的角, 我们都是指这个角的余弦 α_j . 由于 P_i 可以表示 R^n 在 $\mathcal{E}(\mu_i)$ 上的投影, 则我们有 $\alpha_j = \|P_i e_j\|$. 由此我们可以得到一个矩阵 $(\alpha_{ij})_{m \times n}$, 称为图 G 的角矩阵. 这个角矩阵的第 i 行称为特征值 μ_i 的角序列. 图 G 的主角是指图 G 的特征空间与全 1 向量 $j = (1, 1, \dots, 1)$ 所形成的角的余弦.

图的角可由以下方法来计算, 设特征空间 $\mathcal{E}(\mu_i)$ 的一组标准正交基为 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 如果 $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$, 则有

$$\cos \beta_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n x_{kj}^2 \right)^{1/2}.$$

1 相关引理

在文献 [2] 中, 关于图的特征值, 已得到一些初步结论, 这里首先给出几个引理.

引理 1^[2] 设图 $G-j$ 表示从图 G 中去掉点 j 所得到的图, 图 G_j 表示在图 G 中的点 j 加一条悬挂边所得到的图, 那么有

$$P_{G-j}(x) = P_G(x) \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ij}^2}{x - \mu_i},$$

$$P_{G_j}(x) = x P_G(x) - P_{G-j}(x) = P_G(x) \left(x - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ij}^2}{x - \mu_i} \right).$$

引理 2^[2] 设 G_j 表示在图 G 的点 j 加一个环所得到的图, 则有

$$P_{G_j}(x) = P_G(x) - P_{G-j}(x) = P_G(x) \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ij}^2}{x - \mu_i} \right).$$

引理 3^[2] 设图 G 与 H 是两个不相交的图, F 表示在图 G 的点 j 和图 H 的点 k 间连一条边所得到的图, 则有

$$P_F(x) = P_G(x) P_H(x) - P_{G-j}(x) P_{H-k}(x).$$

引理 4^[2] 设 F 表示把图 G 的点 j 和图 H 的点 k 粘在一起 (即让这两个点重合) 所得到的图, 则有

$$P_F(x) = P_G(x) P_{H-k}(x) + P_{G-j}(x) P_H(x) - x P_{G-j}(x) P_{H-k}(x).$$

引理 5^[2] 令 N_k 表示图 G 中长 k 为的路的数目, $H_G(t)$ 表示生成函数 $\sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k$.

那么有

$$H_G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k = n \sum_{i=1}^m \beta_i^2 / (1 - t \mu_i).$$

2 主要结果

定理 1 若 G 是一个 n 阶简单图, 特征值为 μ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), G^s 为在图 G 的每个顶点上加一个环所得到的图, 则图 G^s 的特征值为 $\mu_i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

证明 设图 G 的邻接矩阵为 A , 则其特征多项式为 $P_G(x) = \det(xI - A)$. 显然 G^s 邻接矩阵

为 $A + I$, 且其特征多项式 $P_{G^s}(x) = \det((x-1)I - A)$, 因此结论成立.

推论 1 令 G^s 表示在图 G 的补图 $\bar{G}$ 的每个顶点加一个环所得到的图, 则

$$P_{G^s}(x) = (-1)^n P_G(-x) \left(1 - n \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i^2}{x + \mu_i}\right).$$

证明 我们用符号 $\text{sum} X$ 表示矩阵 X 中所有元素的和, N_k 表示图 G 中长度为 k 的路的数目, 那么有

$$N_k = \text{sum} A^k.$$

根据引理 5, 我们有

$$H_G(t) = \text{sum} \sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k = \text{sum} (I - tA)^{-1} = \text{sum} (I - tA)^* / \det(I - tA),$$

其中 $(I - tA)^*$ 表示矩阵 $(I - tA)$ 的伴随矩阵, $\det(I - tA)$ 表示矩阵 $(I - tA)$ 的行列式.

在接下来的证明之前, 我们要用到下面的结论: 对任意的方阵 X 和同阶全 1 矩阵 J , 有

$$\det(X + tJ) = \det X + t \text{sum} X^*.$$

若图 G 的邻接矩阵为 A , 显然 G^s 的邻接矩阵 B 为 $B = J - A$, 则

$$P_{G^s}(x) = \det(xI - B) = \det(xI + A - J) = \det(xI + A) - \text{sum}(xI + A)^*,$$

其中

$$\begin{aligned} \text{sum}(xI + A)^* &= \text{sum}\left(x\left(I + \frac{1}{x}A\right)\right)^* = x^{n-1} \text{sum}\left(I + \frac{1}{x}A\right)^* = \\ &= x^{n-1} H_G\left(-\frac{1}{x}\right) \det\left(I + \frac{1}{x}A\right) = x^{-1} H_G\left(-\frac{1}{x}\right) \det(xI + A) = \\ &= x^{-1} H_G\left(-\frac{1}{x}\right) (-1)^n P_G(-x) = \\ &= n \sum_{i=1}^m \beta_i^2 / (x + \mu_i) (-1)^n P_G(-x), \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} P_{G^s}(x) &= (-1)^n P_G(-x) - (-1)^n P_G(-x) n \sum_{i=1}^m \beta_i^2 / (x + \mu_i) = \\ &= (-1)^n P_G(-x) \left(1 - n \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i^2}{x + \mu_i}\right). \end{aligned}$$

定理 2 若 $G_{(k)}$ 表示在图 G 的任意 k ($1 \leq k \leq n$) 个顶点上, 每个顶点加 1 个环所得到的图, 那么有

$$P_{G_{(k)}}(x) = P_G(x) \left(1 - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ji}}{x - \mu_i}\right).$$

证明 我们用数学归纳法, 如果 $k=1$, 设这个环在顶点 j 上, 则根据引理 2 我们有

$$P_{G_{(1)}}(x) = P_G(x) \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ji}^2}{x - \mu_i}\right). \quad (1)$$

设对 $k-1$ 个环结论仍然成立, 则对 $G_{(k)}$ (设这 k 个有环的顶点标号为 $1, 2, \dots, k$), 根据引理 2

$$P_{G_{(k)}}(x) = P_{G_{(k-1)}}(x) - P_{G_{(k-1)}}(x), \quad (2)$$

因为 $P_{G_{(k-1)}}(x) = P_G(x) \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_{ij}}{x - \mu_i}\right)$, $P_{G-k}(x) = P(x) \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_k}{x - \mu_i}$, 把以上两式代入式 (2), 即得到我们的结论.

推论 2 若 G 为 n 阶简单图, $j \in V(G)$, F_k 为把 k 个图 G 在点 j 粘合所得到的图, 则有

$$P_{F_k}(x) = kP_G(x)P_{G-j}^{k-1}(x) - (k-1)xP_{G-j}^k(x).$$

证明 首先根据引理 4, 令 $G=H$, 然后再用归纳法即可得到结论.

对任意的图 G 和 H , 设 $u \in V(G)$, $v \in V(H)$, 图 F 是由 $G \cup rH$ (其中 rH 表示 r 个图 H 的并集且 $r \geq 2$) 且在图 G 的点 u 和 r 个图 H 的点 v 之间连 r 条边所得到的图 (图 1), 则我们有以下结论:

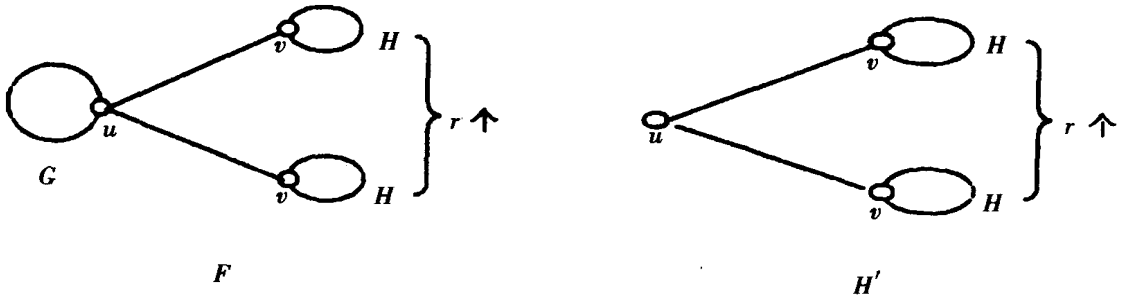


图 1 图 G 与 r 个图 H 的合成图 F

定理 3 若 $|H| = n$, $\lambda(i = 1, 2, \dots, n)$ 为图 H 的特征值, 那么 $\lambda(i = 1, 2, \dots, n)$ 为图 F 的 $r-1$ 重特征值.

证明 令 H' 表示在孤立点 u 和 r 个图 H 的点 v 之间连 r 条边所得到的图 (图 1), 那么根据引理 4, 我们有

$$P_F(x) = P_G(x)P_{H'-u}(x) + P_{G-u}(x)P_{H'}(x) - xP_{G-u}(x)P_{H'-u}(x) = \\ P_G(x)P_H^r(x) + P_{G-u}(x)P_H(x) - xP_{G-u}(x)P_H^r(x),$$

令 H_v 表示在图 H 的顶点 v 加一条悬挂边所得到的图, 根据推论 2, 我们有

$$P_{H'}(x) = rP_{H_v}(x)P_H^{r-1}(x) - (r-1)xP_H^r(x),$$

因此有

$$P_F(x) = P_G(x)P_H^r(x) + P_{G-u}(x)\{rP_{H_v}(x)P_H^{r-1}(x) - (r-1)xP_H^r(x)\} - xP_{G-u}(x)P_H^r(x) = \\ P_H^{r-1}(x)\{P_G(x)P_H(x) + P_{G-u}(x)[rP_{H_v}(x) - (r-1)xP_H(x)] - xP_{G-u}(x)P_H(x)\},$$

根据上式即得到我们所需要的结论.

例: 对于星图 $k_{1,n}$, 我们可以把它的中心点看作图 1 中的图 G , 其他点看作图 H , 则根据定理 3, 图 H 的特征值 (即每一个孤立点相当于一个图 H , 它的特征值为 0) 应为 $k_{1,n}$ 的 $n-1$ 的重特征值. 实际上星图 $k_{1,n}$ 的特征多项式为 $P_{k_{1,n}}(x) = x^{n-1}(x^2 - n)$, 显然 0 为 $n-1$ 重特征值.

定理 3 的结果刻画了一个图的特征值产生重根的规律, 这为我们认识一个图或者一个矩阵在什么情况下产生重根提供了新的思路.

(下转第 104 页)

A Survey on Manufacturing Integrated Supply Chain Modeling

YIN Gang

(College of Automation Science & Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In this paper, a three-dimensional frame model is proposed of decision-making level, function and technique. By the three dimensions, the literature on supply chain management is reviewed, integrated models being placed particular emphasis on. Finally, according to the features of manufacturing, directions are suggested for future research.

Key words: supply chain; integrated model; manufacturing

(上接第 96 页)

参考文献:

- [1] Dragos Cvetkovic, Michael Doob, Horst Sachs. Spectra of Graph[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [2] Dragos Cvetkovic, Peter Rowlinson, Slobodan Simic. Eigenspaces of Graphs[M]. London: Cambridge University Press, 1997.

Several Graph Transformations and Its Eigenvalues

WEI Jun-bin

(Dept. of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: The eigenvalues of a graph are eigenvalues of its adjacency matrix. This paper mainly studies how the eigenvalues change after graph transformations. The characteristic polynomial and graph angles are applied to study them.

Key words: adjacency matrix; eigenvalue; graph angle